

6 Das ebene Dreifachpendel

Wolfgang Eisenberg*, Gerd-Wolfgang Reinicke**,
Uwe Renner***

Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden mit Hilfe des LAGRANGE- bzw. des HAMILTON-Formalismus Möglichkeiten der theoretischen als auch der numerischen Behandlung hauptsächlich des Dreifachpendels vorgestellt. Dieses Mehrfachpendel zählt zu den Systemen mit hoher Dimensionalität und stellt daher eine Herausforderung an die Untersuchungsmethoden zur nichtlinearen Dynamik dar. Wie bei den meisten nichtlinearen Systemen solcher Komplexität reicht das Spektrum der Schwingungsformen von der reinen Periodizität bei kleiner bis hin zum Chaos mit zunehmender Anregung. Neben den Untersuchungsmethoden für die Phasenraumkoordinaten (POINCARÉ-Schnitt, Autokorrelation und Spektralanalyse der Zeitreihen, Darstellung in zeitverzögerten Koordinaten) wird eine zeitliche Methode zur Untersuchung von Wiederkehrereignissen vorgestellt. Die Zulässigkeit linearer Näherungen wird untersucht, und nichtlineare Korrekturen werden angegeben.

6.1 Einleitung

Mit erfreulicher Begeisterung wird heute das Thema „Gangbildanalyse“ im Wissenschaftsspektrum der Medizin, der Physik, der Mathematik, der Informatik, der Biochemie und der Psychologie als ein interdisziplinäres Forschungsfeld erkannt und zunehmend erfolgreicher behandelt.

*Gesellschaft für ökologische Technologie und Systemanalyse e.V.,
Ostheimstr. 3a, D-04328 Leipzig

**Wissenschaftszentrum Leipzig – Förderverein e.V.,
Goldschmidtstraße 26, D-04103 Leipzig

***Wissenschaftszentrum Leipzig – Förderverein e.V.,
Goldschmidtstraße 26, D-04103 Leipzig

Schon im vorigen Jahrhundert, nämlich 1836, berichteten die Gebrüder WEBER, WILHELM und EDUARD, in ihrer „Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge“ über ihre Untersuchungen zum menschlichen Gang, die sie bis zu einer passablen Theorie des Gehens und Laufens ausbauen konnten [1, 2].

Sehr eindrucksvoll erläuterte neuerdings HORVATH in seiner Phänomenologie des Gangbildes [3], warum streng objektive Beschreibungen für die Ganganalyse wichtig sind. Interessanterweise verhält sich nämlich der Körperschwerpunkt des Menschen während der sogenannten Standphase die meiste Zeit wie ein kopfstehendes physikalisches Pendel. Er bewegt sich annähernd auf einem Kreisbogen um das Knöchelgelenk des Fußes, wie das Pendel eines Metronoms. Die Körpermasse hält sich dabei noch genauer an die einfachen Pendelgesetze als der Unterschenkel in der sogenannten Pendelphase, wie BRAUNE und FISCHER in ihrer Analyse des menschlichen Ganges herausfanden [4].

Heute weiß man, daß dem Menschen ein kompliziertes und komplexes Muskel- und Nervensystem hilft, stabile Positionen beim alltäglichen Stehen und Laufen zu erhalten. Das wird ihm z. T. erst in besonderen Bewegungsabläufen wie dem Skilaufen, dem Turnen oder bei sensiblen Ausfällen mit Beeinträchtigung der Feinmotorik bewußt.

Daher kann das Verständnis des mehrgliedrigen Pendels, das uns ermöglicht, auf die Stabilität und Motorik Einfluß zu nehmen, die weitere Entwicklung der Gangbildanalyse wesentlich befördern. Denn durch die Mehrgliedrigkeit läßt sich bekanntermaßen schon in der Technik eine hohe Zahl von Freiheitsgraden (wie z. B. beim Roboter, bei Kranen und Ketten) und damit Flexibilität erreichen.

Durch Störungen könnten solche Systeme durchaus in Schlingerbewegungen geraten und katastrophal enden. Deshalb ist die Vorkenntnis gefährlicher Situationen von entscheidender Bedeutung für die Zuverlässigkeit der Systeme. Auf diese Weise ist eine gezielte Stabilisierung ohne Verlust an Flexibilität erreichbar. Entsprechende Möglichkeiten zur Steuerung eines stehenden Dreifachpendels wurden in der Literatur schon untersucht (siehe z. B. [5]).

6.2 Beschreibung des Modells

Es soll die ebene Bewegung des mathematischen Dreifachpendels im Schwerfeld mit der Fallbeschleunigung \vec{g} und deren Betrag g beschrieben werden. Viele Aussagen können aber auch für den allgemeinen Fall einer Kette mit n Gliedern getroffen werden. Soweit es möglich ist, soll dies auch geschehen. Hier wird nur die Bewegung der Massenpunkte verfolgt. Eine Übertragung auf

das physikalische Pendel mit den entsprechenden Trägheitsmomenten für die Pendelarme sollte nicht schwerfallen.

Die Position des n -ten Massenpunktes in der x - y -Ebene ist gegeben durch

$$x_n = \sum_{i=1}^n l_i \sin \phi_i, \quad y_n = \sum_{i=1}^n l_i \cos \phi_i \quad (6.1)$$

mit festen Pendellängen l_i . Die Winkel ϕ_i zum Lot des vorigen Massenpunktes bestimmen die Lage des Pendels eindeutig. Die Hängeposition ist durch $\vec{\phi} = 0$ gekennzeichnet. Ein kopfstehendes Pendel erhält man in dieser Beschreibung durch Ersetzen von ϕ_i durch $\phi_i + \pi$. Somit läßt sich die Pendelbewegung in der Ebene auch als Bewegung auf dem n -dimensionalen Torus T^n als direktes Produkt von n Kreislinien S^1 , d. h. $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, verstehen.

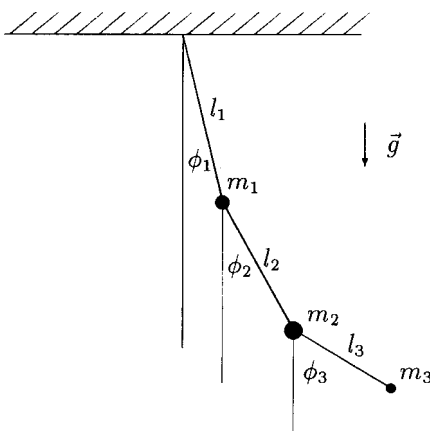


Abb. 6.1: Modell des mathematischen Dreifachpendels

6.3 LAGRANGE- und HAMILTON-Formalismus

Zur Beschreibung der Bewegung liefert die klassische Mechanik zwei wesentliche Zugänge, den LAGRANGE- und den HAMILTON-Formalismus, die jeweils

für bestimmte Aufgaben Vorteile bringen. So liefert der erstere Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen 2. Ordnung, der letztere Systeme erster Ordnung, was z. T. bei numerischen Untersuchungen von Vorteil ist. Für einfache mechanische Systeme, etwa Systeme ohne äußere Kräfte, sind die Beschreibungen äquivalent. Eine ausführliche Übersicht zur geeigneten Verwendung des LAGRANGE- und HAMILTON-Formalismus findet man bei F. KUYPERS [6].

6.3.1 Der LAGRANGE-Formalismus

Die historisch vorausgehende und sich behauptende Darstellung mehrgliedriger Systeme ist die Darstellung im LAGRANGE-Formalismus.

Will man die Vorzüge des Rechnens in rechtwinkligen Koordinaten nicht aufgeben, so benutzt man zur Formulierung des Bewegungsproblems eines ebenen Mehrfachpendels die LAGRANGESchen Gleichungen 1. Art

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, 2n \quad (6.2)$$

mit

X_k : Kraftkomponenten

m_k : Massen

x_k : Koordinaten

λ_i : LAGRANGESchen Multiplikatoren

F_i : holonomen Kopplungsbedingungen der Massenpunkte m_1, \dots, m_n .

Die λ_i werden so gewählt, daß gilt:

$$X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (6.3)$$

Sie beschreiben den Zwang, der durch die Einhaltung von holonomen Bedingungen F_i der Bewegung auferlegt wird. Die Zwangskräfte sind damit explizit bestimmbar. Die Methode der LAGRANGESchen Gleichungen 1. Art ist deshalb für die Orthopädietechnik interessant. Denn sie verknüpft mit der Gangbildanalyse folgende Erwartungen [7]: „Die Präzision einer Bewegung ist gekennzeichnet durch die Feinheit der Anpassung auf die aufgewendete Kraft, die Beschleunigung, wie auch Sparsamkeit (Ökonomie) der Bewegung und schließlich auf die Genauigkeit des zeitlichen und räumlichen Vollzugs.“

Die Beschreibung mit rechtwinkligen Koordinaten erlaubt z. B. beim mathematischen Pendel die Entkopplung der Bewegungsgleichungen.

Als Bewegungsgleichungen ergeben sich für das mathematische Pendel die LAGRANGESchen Gleichungen 1. Art:

$$m\ddot{x} = +2\lambda x \quad (6.4)$$

$$m\ddot{y} = 2\lambda y - mg \quad (6.5)$$

mit der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 - l^2 = F(x, y)$. Ohne den LAGRANGESchen Parameter λ bestimmen zu müssen, erhält man leicht aus diesen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right\} = 0, \quad (6.6)$$

da $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = mg\dot{y}$ und $\dot{x}x + \dot{y}y = 0$ ist. Mit $x = l \cos \phi$ und $y = l \sin \phi$ ergibt sich daraus der bekannte Energieausdruck (1. Bewegungsintegral):

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 - mgl \sin \phi.$$

Dieser Ausdruck ist integrabel und führt zu einem elliptischen Integral erster Gattung (siehe Anhang B).

Die Formulierung des Bewegungsproblems mit den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art reduziert die Zahl der benötigten Koordinaten auf die unabhängigen und verzichtet auf die Explizierung der Zwangskräfte. Mit Hilfe der verallgemeinerten Koordinaten q_i und Geschwindigkeiten \dot{q}_i erhält man dann die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n - r. \quad (6.7)$$

Für das Doppelpendel lautet z. B. die LAGRANGE-Funktion L_2 :

$$L_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2. \quad (6.8)$$

Für das Dreifachpendel ist die Gestalt der LAGRANGE-Funktion etwas komplizierter:

$$L_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2 + m_3}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{m_3}{2} l_3^2 \dot{\phi}_3^2 + (m_2 + m_3) l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + m_3 [l_1 l_3 \cos(\phi_1 - \phi_3) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 + l_2 l_3 \cos(\phi_2 - \phi_3) \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3] + (m_1 + m_2 + m_3) g l_1 \cos \phi_1 + (m_2 + m_3) g l_2 \cos \phi_2 + m_3 g l_3 \cos \phi_3. \quad (6.9)$$

Diese Strukturen enthalten Terme, die zu Nichtlinearitäten in den Bewegungsgleichungen führen. Sie sind aber noch relativ einfach und überschaubar.

Ein weiterer Vorteil des LAGRANGE-Formalismus besteht darin, daß die LAGRANGESchen Gleichungen auch für wirkende Kräfte, die z. T. ein Potential V haben, formulierbar sind:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k. \quad (6.10)$$

Die Q_k sind die Kraftkoordinaten zu den Koordinaten q_k im Ausdruck für die virtuelle Arbeit δA der äußeren Kraft in den virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \sum_k Q_k \delta q_k. \quad (6.11)$$

Dies ist eine Erweiterung des Kraftbegriffs, die als mathematische Definition zulässig ist. Solche Anwendungsprobleme treten in der Mechanik lebender Körper auf (siehe z. B. [8]).

6.3.2 Der HAMILTON-Formalismus

Ein Vorteil des HAMILTON-Formalismus zeigt sich bei der Behandlung konservativer Systeme. Für diese Systeme stimmt die HAMILTON-Funktion H mit der zeitlich konstanten Energie E des Systems überein. So eignet sich in diesen Fällen die Energie als Parameter für die Bewegungszustände. Der Wert von E ist durch die Anfangsbedingungen Ort \vec{q}_0 und Impuls \vec{p}_0 eindeutig bestimmt. Beispielsweise kann man einem Pendelsystem Energie in Form eines äußeren Impulses oder durch Auslenkung der Pendelglieder zuführen. Sind etwa alle Massen und Längen gleich m bzw. l , so wäre die dimensionslose Größe $\epsilon = E/mgl$ ein geeigneter Analyseparameter. Bei ungleichen Längen braucht man zur Beschreibung der Pendelbewegung zusätzliche Parameter, z. B. entsprechende Massen- und Längenverhältnisse.

Die genannten Formalismen, der LAGRANGE- und der HAMILTON-Formalismus, erfordern das Aufschreiben der potentiellen und der kinetischen Energie des Systems, was für das ebene mathematische Mehrfachpendel auch im allgemeinen Fall möglich ist. Bei der folgenden Normierung (Gesamtpotential $V^{(n)}(\vec{\phi} = 0) = 0$) wird die hängende Ruheposition des Pendels ausgezeichnet. Häufig wird jedoch eine andere Normierung des Potentials vorgezogen (siehe Abschnitt zum LAGRANGE-Formalismus). Die potentielle Energie $V^{(n)}$ des aus n Gliedern bestehenden Pendels lautet:

$$V^{(n)} = g \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^i l_j (1 - \cos \phi_j) \quad (6.12)$$

bzw.

$$V^{(n)} = g \sum_{j=1}^n \mu_j^{(n)} l_j (1 - \cos \phi_j) \quad (6.13)$$

mit der Masse $\mu_j^{(n)} = \sum_{i=j}^n m_i$. Die kinetische Energie $T^{(n)}$ ist gegeben durch:

$$T^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2).$$

Mit Hilfe von (6.1) kann man die Ableitungen von x_i und y_i ersetzen und erhält eine Darstellung in den Winkeln und deren Ableitungen allein.

Im weiteren soll auf die Indizierung nach der Gliederzahl verzichtet werden, da die Bedeutung, um welche Art Pendel es sich handelt, jeweils spezifiziert wird bzw. die Beziehungen allgemeingültig sind.

Die HAMILTON-Funktion H gewinnt man durch LEGENDRE-Transformation aus der LAGRANGE-Funktion L :

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L. \quad (6.14)$$

Hierbei sind die $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ die verallgemeinerten Impulse. Dieses System von Gleichungen benutzt man zur Substitution der \dot{q}_i , was bei einer großen Zahl von Koordinaten sehr aufwendig bzw. nur mit großem Zeit- und Ressourcenbedarf¹ erreichbar ist.

In unserem Fall ist V nicht von den Geschwindigkeiten abhängig. Somit ist einfach $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, und da T eine quadratische Form ist, folgt $H = T + V$. In diesem einfachen Fall erhält man die Impulse durch eine bezüglich \vec{p} und \vec{q} lineare Transformation $\vec{p} = \mathbf{A} \dot{\vec{q}}$, wobei \mathbf{A} eine symmetrische und positiv definite Matrix mit den Elementen $A_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ ist. Diese hängt i. allg. noch von den Koordinaten q_i ab. Dann ist die HAMILTON-Funktion durch

$$H = \frac{1}{2} \vec{p}^T \mathbf{A}^{-1} \vec{p} + V \quad (6.15)$$

gegeben. Aus H folgen die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.16)$$

¹Papier oder Speicherkapazität beim Computer

oder mit der Matrix \mathbf{A} für konservative Systeme

$$\dot{\vec{q}} = \mathbf{A}^{-1} \vec{p}, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2} \vec{p}^T \frac{\partial}{\partial q_i} \mathbf{A}^{-1} \vec{p} - \frac{\partial}{\partial q_i} V. \quad (6.17)$$

Speziell besitzt das ebene Doppelpendel ($n = 2$) die HAMILTON-Funktion $H = H(\phi_1, \phi_2, p_1, p_2)$ mit

$$H = \frac{1}{2\mathcal{N}} \left[\left(\frac{p_1}{l_1} \right)^2 - 2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \frac{p_1 p_2}{l_1 l_2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{p_2}{l_2} \right)^2 \right] \quad (6.18)$$

$$+ \mu_1 g l_1 (1 - \cos \phi_1) + \mu_2 g l_2 (1 - \cos \phi_2)$$

und den Abkürzungen $\mathcal{N} = m_1 + m_2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2)$ und $\mu_1 = m_1 + m_2$, $\mu_2 = m_2$.

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{l_1 \mathcal{N}} \left[\frac{p_1}{l_1} - \frac{p_2}{l_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \right],$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\sin 2(\phi_1 - \phi_2)}{2\mathcal{N}^2} \left[\mu_2 \left(\frac{p_1}{l_1} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{p_2}{l_2} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{\mathcal{N}^2} \left[\mu_1 + \mu_2 \cos^2(\phi_1 - \phi_2) \right] \frac{p_1 p_2}{l_1 l_2} - \mu_1 g l_1 \sin \phi_1,$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{l_2 \mathcal{N}} \left[\frac{\mu_1 p_2}{\mu_2 l_2} - \frac{p_1}{l_1} \cos(\phi_1 - \phi_2) \right],$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\sin 2(\phi_2 - \phi_1)}{2\mathcal{N}^2} \left[\mu_2 \left(\frac{p_1}{l_1} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{p_2}{l_2} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{\sin(\phi_2 - \phi_1)}{\mathcal{N}^2} \left[\mu_1 + \mu_2 \cos^2(\phi_1 - \phi_2) \right] \frac{p_1 p_2}{l_1 l_2} - \mu_2 g l_2 \sin \phi_2.$$

Die HAMILTON-Funktion für ein ebenes Dreifachpendel ($n = 3$) ist mit

$$\mathcal{N} = m_1 m_2 + m_1 m_3 \sin^2(\phi_2 - \phi_3) + m_2 (m_2 + m_3) \sin^2(\phi_1 - \phi_2)$$

und

$$\mu_1 = m_1 + m_2 + m_3, \quad \mu_2 = m_2 + m_3, \quad \mu_3 = m_3$$

gegeben durch:

$$H = \frac{1}{2\mathcal{N}} \left[\mu_2 - \mu_3 \cos^2(\phi_2 - \phi_3) \right] \left(\frac{p_1}{l_1} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\mathcal{N}} [\mu_1 - \mu_3 \cos^2(\phi_1 - \phi_3)] \left(\frac{p_2}{l_2} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\mu_2}{\mu_3} [\mu_1 - \mu_2 \cos^2(\phi_1 - \phi_2)] \left(\frac{p_3}{l_3} \right)^2 \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} [(2\mu_2 - \mu_3) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \mu_3 \cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3)] \frac{p_1 p_2}{l_1 l_2} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} \mu_2 [\cos(\phi_1 - \phi_3) - \cos(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)] \frac{p_1 p_3}{l_1 l_3} \\
& - \frac{1}{2\mathcal{N}} [(2\mu_1 - \mu_2) \cos(\phi_2 - \phi_3) - \mu_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)] \frac{p_2 p_3}{l_2 l_3} \\
& + \mu_1 g l_1 (1 - \cos \phi_1) + \mu_2 g l_2 (1 - \cos \phi_2) + \mu_3 g l_3 (1 - \cos \phi_3).
\end{aligned}$$

Schon hier zeigt sich der enorme Aufwand zur Bestimmung von H , der sich vor allem aus der Invertierung von \mathbf{A} ergibt. Die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen für das Dreifachpendel enthalten so viele Terme, daß sie hier nur z. T. wiedergegeben werden können:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= \left\{ [\mu_2 - \mu_3 \cos^2(\phi_2 - \phi_3)] \frac{p_1}{l_1^2} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} [(2\mu_2 - \mu_3) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \mu_3 \cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3)] \frac{p_2}{l_1 l_2} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \mu_2 [\cos(\phi_1 - \phi_3) - \cos(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)] \frac{p_3}{l_1 l_3} \right\} \mathcal{N}^{-1} \\
\dot{\phi}_2 &= \left\{ [\mu_1 - \mu_3 \cos^2(\phi_1 - \phi_3)] \frac{p_2}{l_2^2} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} [(2\mu_2 - \mu_3) \cos(\phi_1 - \phi_2) + \mu_3 \cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3)] \frac{p_1}{l_1 l_2} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} [(2\mu_1 - \mu_2) \cos(\phi_2 - \phi_3) - \mu_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)] \frac{p_3}{l_2 l_3} \right\} \mathcal{N}^{-1} \\
\dot{\phi}_3 &= \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_3} [\mu_1 - \mu_2 \cos^2(\phi_1 - \phi_2)] \frac{p_3}{l_3^2} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \mu_2 [\cos(\phi_1 - \phi_3) - \cos(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)] \frac{p_1}{l_1 l_3} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} [(2\mu_1 - \mu_2) \cos(\phi_2 - \phi_3) - \mu_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)] \frac{p_2}{l_2 l_3} \right\} \mathcal{N}^{-1}.
\end{aligned}$$

Für den Fall mit n Gliedern läßt sich die Transformationsmatrix \mathbf{A} noch relativ einfach angeben. Es ist

$$A_{ij} = \mu_l l_i l_j \cos(\phi_i - \phi_j), \quad l = \max(i, j)$$

mit der Substitution $\mu_j = \sum_{k=j}^n m_k$. Da auch die potentielle Energie, wie oben angegeben, voll bekannt ist, wird hiermit auch der allgemeine Fall formal beschrieben.

Die HAMILTON-Funktion findet auch Verwendung in der statistischen Physik bei der Berechnung des Zustandsintegrals

$$Z = \iint d^n q d^n p e^{-\beta H(\vec{q}, \vec{p})}$$

mit $\beta = 1/k\Theta$. Hierbei ist k die BOLTZMANN-Konstante und Θ die absolute Temperatur. Die Integration über die Impulse läßt sich wegen der GAUSS-Form unter Verwendung von (6.15) sofort ausführen. Es verbleibt dann nur noch die Integration im Koordinaten-Raum:

$$Z = \left(\sqrt{2\pi k\Theta}\right)^n \int d^n q \sqrt{\det \mathbf{A}} e^{-\beta V(\vec{q})}$$

Eine andere Integrationsmethode wäre die über Energieschalen mit konstanter Niveaufläche E . Die statistische Behandlung für das Pendel soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

6.4 Näherungen

6.4.1 Die harmonische Näherung und nichtlineare Korrekturen für das Doppelpendel

Die Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel in der harmonischen Näherung haben die einfache Gestalt

$$\begin{aligned} \mu_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 + \mu_1 g l_1 \phi_1 &= 0 \\ l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 + l_2^2 \ddot{\phi}_2 + g l_2 \phi_2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\mu_1 = m_1 + m_2$ ist. Mit dem Ansatz $\phi_k = A_k e^{i\omega t}$ ($k = 1, 2$) ergeben sich aus den Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung die möglichen Frequenzen ω_k :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left\{ \mu_1 (l_1 + l_2) \pm \sqrt{\mu_1 [\mu_1 (l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \right\}.$$

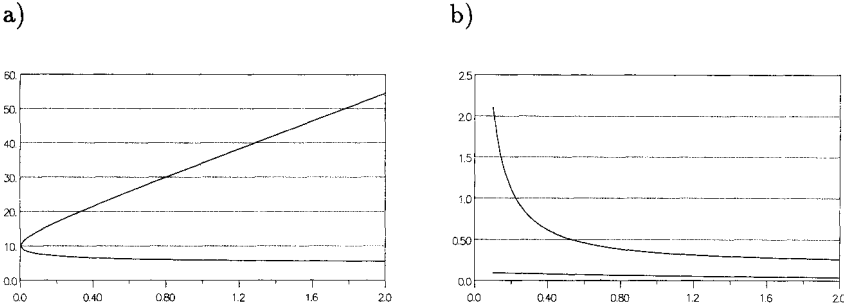


Abb. 6.2: Frequenzen $\omega_{1,2}^2$ des Doppelpendels (harmonische Näherung) als Funktion der Parameter m_2 (a) und l_2 (b)

Aus den Abbildungen 6.2a und 6.2b ist ersichtlich, daß eine Frequenz eine starke Parameterabhängigkeit zeigt, während die andere Frequenz nur schwach von diesem Parameter beeinflusst wird. Um die Grenzen der harmonischen Näherung zu bestimmen, wurde ein nichtlineares Korrekturglied in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt, das den nichtlinearen Einfluß der Winkelgeschwindigkeiten ausdrückt:

$$\begin{aligned}\mu_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 + \mu_1 g l_1 \phi_1 + m_2 l_1 l_2 (\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_2^2 &= 0 \\ l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 + l_2^2 \ddot{\phi}_2 + g l_2 \phi_2 - l_1 l_2 (\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1^2 &= 0.\end{aligned}$$

Für die Lösungen ϕ_i der nichtlinearen Näherung wurde hier ein Potenzreihenansatz gewählt:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= a_{11} + a_{12}t + a_{13}t^2 \\ \phi_2(t) &= a_{21} + a_{22}t + a_{23}t^2.\end{aligned}$$

Quantitative Aussagen sind wichtig für die Analyse nichtlinearer Effekte, vor allem dann, wenn die Gleichgewichtslage linearisierter Systeme die Dynamik nicht ausreichend beschreibt (siehe auch Artikel von K. SCHIELE, Abschn. 5.4). Sind nichtlineare Effekte bedeutsam, dann müssen problemangepaßte Lösungswege beschrieben werden. Dazu sind die Bewegungsgleichungen erforderlich (siehe z. B. [9]). Das trifft für die Mehrfachpendel als konservative

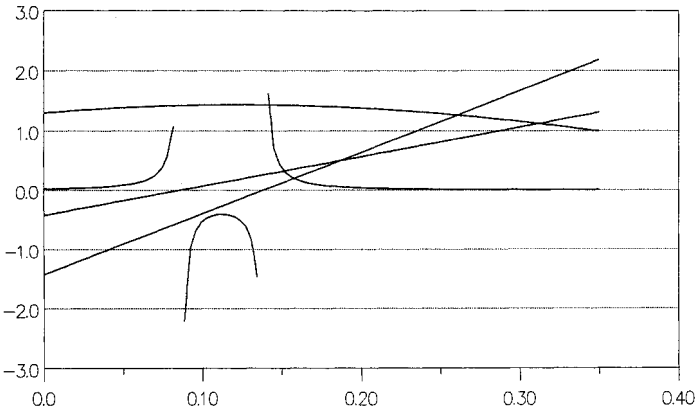


Abb. 6.3: Doppelpendel – Korrekturfunktion der nichtlinearen Näherung:

$$Q = \frac{\phi_1 \phi_2}{\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2} \quad (\text{Funktionen von oben nach unten für } t = 0: \phi_1 \phi_2; Q(t[s]); \dot{\phi}_1; \dot{\phi}_2)$$

Systeme mit grenzstabilen Lösungen zu. Obiges Verfahren erlaubt die Erarbeitung eines Überblicks über mögliche Lösungen in Abhängigkeit von Systemparametern. So ergibt sich aus der Korrekturfunktion Q (siehe Abb. 6.3 bis 6.7) ein Bereich der Ungültigkeit der harmonischen Näherung, der nicht so offensichtlich ist. Auch F. KUYPERS wies schon auf die Zusatzbedingung für die harmonische Näherung hin ([6], S. 348).

6.4.2 Die harmonische Näherung und nichtlineare Korrekturen für das Dreifachpendel

Als Bewegungsgleichungen für das Dreifachpendel in der harmonischen Näherung ergeben sich

$$\begin{aligned} \mu_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1 + \mu_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 + m_3 l_1 l_3 \ddot{\phi}_3 + \mu_1 g l_1 \phi_1 &= 0 \\ \mu_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 + \mu_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_3 l_2 l_3 \ddot{\phi}_3 + \mu_2 g l_2 \phi_2 &= 0 \\ l_1 l_3 \ddot{\phi}_1 + l_2 l_3 \ddot{\phi}_2 + l_3^2 \ddot{\phi}_3 + g l_3 \phi_3 &= 0 \end{aligned}$$

mit $\mu_1 = m_1 + m_2 + m_3$ und $\mu_2 = m_2 + m_3$.

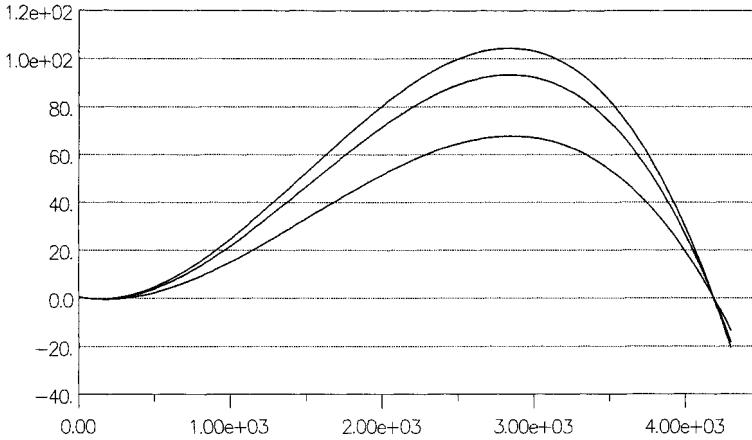


Abb. 6.4: Frequenzen ω_i des Dreifachpendels (Nullstellen der abgebildeten Funktionen)

Berücksichtigt man die nichtlinearen Korrekturterme in den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_i$, so ergibt sich hier:

$$\begin{aligned}
 & \mu_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1 + \mu_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 + m_3 l_1 l_3 \ddot{\phi}_3 + \mu_1 g l_1 \phi_1 \\
 & + \mu_2 l_1 l_2 (\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_2^2 + m_3 l_1 l_3 (\phi_1 - \phi_3) \dot{\phi}_3^2 = 0 \\
 & \mu_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 + \mu_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_3 l_2 l_3 \ddot{\phi}_3 + \mu_2 g l_2 \phi_2 \\
 & - \mu_2 l_1 l_2 (\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1^2 + m_3 l_2 l_3 (\phi_2 - \phi_3) \dot{\phi}_3^2 = 0 \\
 & \quad l_1 l_3 \ddot{\phi}_1 + l_2 l_3 \ddot{\phi}_2 + l_3^2 \ddot{\phi}_3 + g l_3 \phi_3 \\
 & - l_1 l_3 (\phi_1 - \phi_3) \dot{\phi}_1^2 - l_2 l_3 (\phi_2 - \phi_3) \dot{\phi}_2^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Auch hier wurden mit einem Potenzreihenansatz für die Funktionen ϕ_i die nichtlinearen Korrekturen bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(t) &= a_{11} + a_{12}t + a_{13}t^2 \\
 \phi_2(t) &= a_{21} + a_{22}t + a_{23}t^2 \\
 \phi_3(t) &= a_{31} + a_{32}t + a_{33}t^2.
 \end{aligned}$$

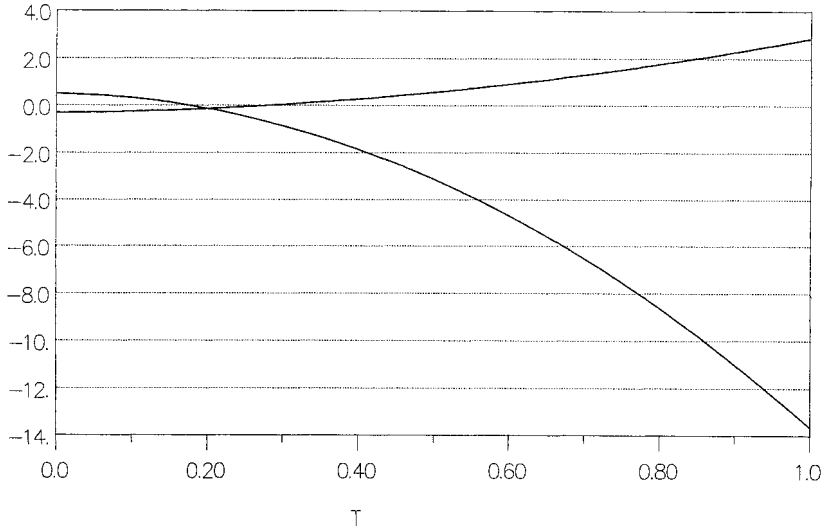


Abb. 6.5: Die Funktionen ϕ_i in der nichtlinearen Näherung (Dreifachpendel; von oben für $t = 0$: ϕ_3 ; ϕ_1)

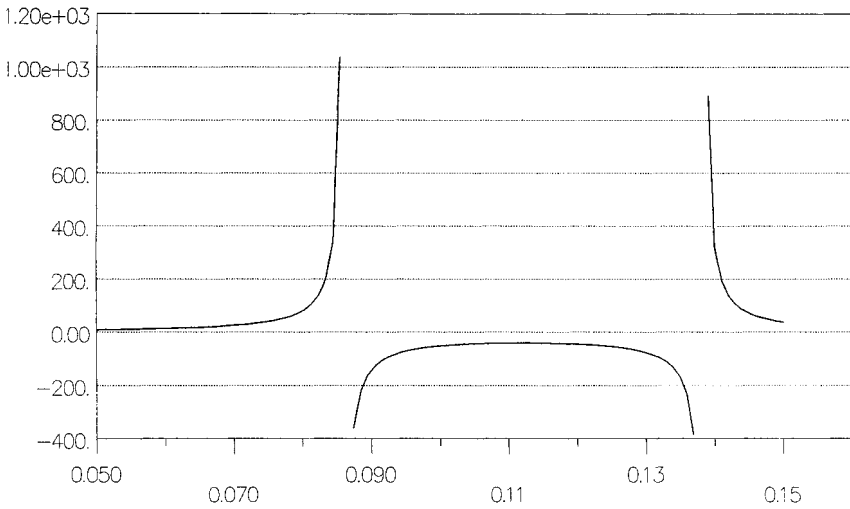


Abb. 6.6: Die Korrekturfunktion für das Doppelpendel

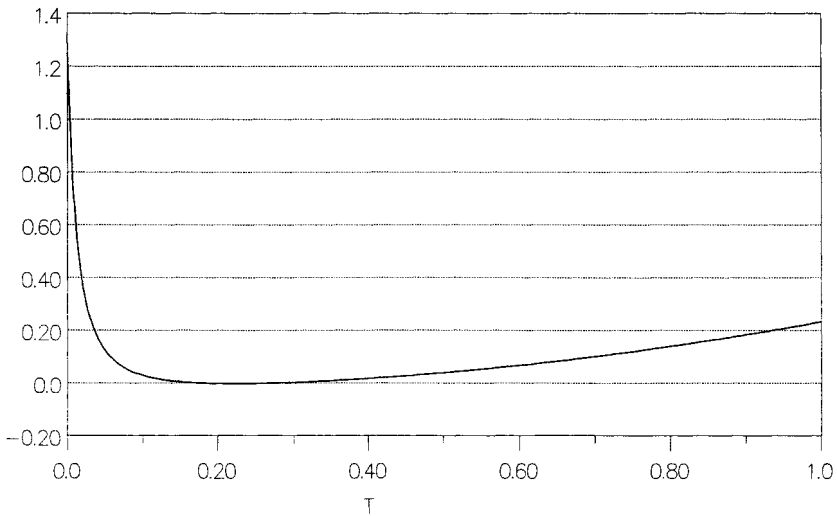
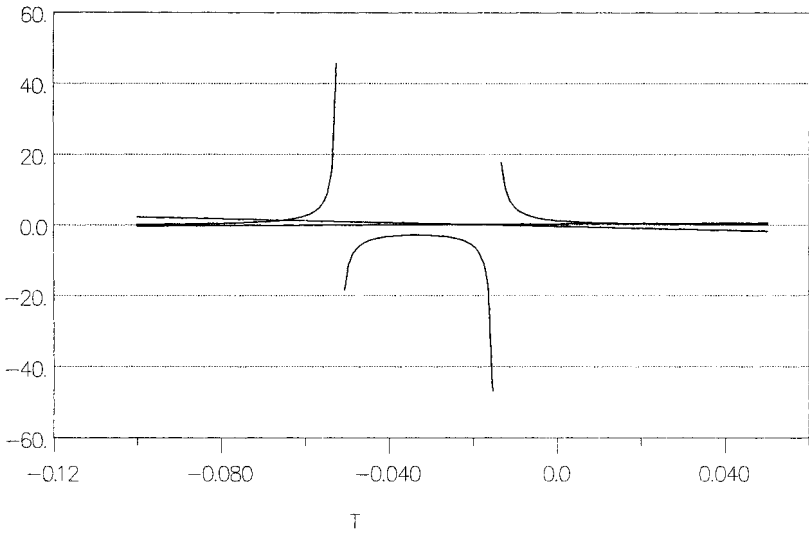


Abb. 6.7: Die Korrekturfunktion für das Dreifachpendel (Sonderfall: $\phi_1 = \phi_2$; $l_2 = l_3$; unten: Intervall $[0, 1]$)

6.5 Betrachtungen zur Stabilität

6.5.1 Lineare LYAPUNOV-Stabilität

Das Wertespektrum der Eigenwerte des linearisierten Systems der Bewegungsgleichungen bzw. die (charakteristischen) LYAPUNOV-Exponenten geben einen Überblick über die Stabilität gegenüber kleinen Störungen des Systems. Sie sind ein Maß für das exponentielle Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien in die jeweilige Raumrichtung: $x_i(t) \sim \exp(\lambda_i t)$.

Von LYAPUNOV wurden Bedingungen erarbeitet, die es ermöglichen, Aussagen zur Stabilität in der Nähe der Fixpunkte (kritische Punkte) zu treffen. Man betrachtet dabei das Eigenwertspektrum der linearisierten Bewegungsgleichungen an diesen Punkten. Grob gesagt ist ein System stabil, wenn alle Eigenwerte λ_j negativ sind und somit ein exponentielles Entfernen benachbarter Trajektorien unmöglich wird.

Es sollen nun die Untersuchungen zur linearen Stabilität [10] an den Gleichgewichtspunkten $\vec{q} = 0, \vec{p} = 0$ für das Pendel erfolgen. Man erhält die entsprechenden Lagen am einfachsten aus den Bewegungsgleichungen (6.17). Die Impulse sind (die einzige Lösung) identisch null, d. h. $\vec{p} = 0$. Damit muß auch $\partial V / \partial \vec{\phi} = 0$ sein, d. h. $\sin \phi_i = 0 \forall i$. Die einzelnen Winkelkoordinaten können wahlweise die Werte 0 oder π annehmen. Gleichbedeutend können die Längen der einzelnen Pendel durch negative Werte ersetzt werden, um den kopfstehenden Fall zu erzeugen. So besitzt das Doppelpendel 4 Gleichgewichtslagen, das Dreifachpendel 8 und allgemein das n -fach-Pendel 2^n Gleichgewichtslagen.

Faßt man die Vektoren $\vec{\phi}$ und \vec{p} zu einem Vektor $\vec{X} = (\vec{\phi}, \vec{p})^T$ zusammen, so kann man die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen in der Form $\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ schreiben. Hieraus erhält man das lineare System

$$\dot{\vec{Z}} = \mathbf{J}^* \cdot \vec{Z} \quad (6.19)$$

mit der JACOBI-Matrix (Funktionalmatrix) $\mathbf{J}^* = \partial \vec{f} / \partial \vec{X}$ an den Fixpunkten \vec{X}^* . Im allgemeinen können die Elemente dieser Matrix noch von der Zeit abhängen, was jedoch für das hier betrachtete konservative System des Pendels nicht zutrifft.

Im Fall des Doppelpendels kann man das Stabilitätsverhalten explizit aus den Eigenwerten von \mathbf{J}^* bestimmen. Im stehenden Fall sind die Eigenwerte $\kappa_i^{(1)}$ ($i = 1, \dots, 4$) gegeben durch

$$\kappa_1^{(1)} = \sqrt{\frac{g}{2\sqrt{l_1 l_2}}} \sqrt{ML + \sqrt{M^2 L^2 - 4M}}, \quad \kappa_2^{(1)} = -\kappa_1^{(1)},$$

$$\kappa_3^{(1)} = \sqrt{\frac{g}{2\sqrt{l_1 l_2}}} \sqrt{ML - \sqrt{M^2 L^2 - 4M}}, \quad \kappa_4^{(1)} = -\kappa_3^{(1)}$$

mit $M = 1 + \frac{m_2}{m_1}$ und $L = \frac{l_1 + l_2}{\sqrt{l_1 l_2}}$. Alle Wurzelterme sind reell. Die Werte $\kappa_1^{(1)}$ und $\kappa_3^{(1)}$ sind positiv, wobei der erstere zeitlich gegenüber dem letzteren dominant ist. Die Bewegung ist instabil.

Die Eigenwerte $\kappa_i^{(2)}$ für das hängende Pendel sind alle rein imaginär; somit liegt ein elliptischer Fixpunkt vor. Man erhält sie aus dem vorigen Fall durch Substitution $l_1 \rightarrow -l_1$ und $l_2 \rightarrow -l_2$. Sie lauten:

$$\kappa_i^{(2)} = i \kappa_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Die Definition von L wird beibehalten. Die Bewegung (Schwingung) verhält sich stabil, und die positiven Imaginärteile entsprechen den Frequenzen ω_i .

Außer den betrachteten Fällen gibt es noch zwei weitere instabile Gleichgewichtspunkte, beide in eingeknickter Stellung. Ausgehend von den Gelenkpunkten zeigt jeweils einer der Arme in Richtung des Schwerfeldes ($\phi_i = 0$) und der andere in die entgegengesetzte Richtung ($\phi_j = \pi$). Für $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$ erhält man nun mit $L = \frac{l_1 - l_2}{\sqrt{l_1 l_2}}$ dieselbe Lösungsform für die Eigenwerte wie beim stehenden Pendel. Im Grunde wurde dieser Fall aus dem hängenden Pendel durch Substitution $l_2 \rightarrow -l_2$ erzeugt. Auch der entgegengesetzt geknickte Fall besitzt dieselbe Lösungsform für die Eigenwerte wie das stehende Pendel. Dieser kann aus dem hängenden Pendel durch Substitution $l_1 \rightarrow -l_1$ erzeugt werden. Dann ist $L = \frac{l_2 - l_1}{\sqrt{l_1 l_2}}$.

Die gemachten Aussagen konzentrierten sich bisher auf die Stabilität in der Umgebung der Fixpunkte. Allgemeiner läßt sich das mittlere Systemverhalten mit beliebigen Anfangsbedingungen \vec{X}_0 und zeitlich veränderlichem Vektorfeld \vec{f} untersuchen (s. [11], Abschn. 3.3). Hierzu betrachtet man die zeitliche asymptotische Entwicklung $t \rightarrow \infty$ von $\vec{Z}(t)$. Man erhält dann die (eindimensionalen) LYAPUNOV-Exponenten aus $\lambda_i(\vec{X}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\vec{Z}_i(t)\|$, wobei $\vec{Z}_i(t)$ in Richtung des i -ten Eigenvektors zeigt.

Der stabile Schwingungszustand läßt sich im Phasenraum durch Trajektorien mit konstanten Frequenzverhältnissen der einzelnen Moden darstellen, wobei sowohl periodische als auch fastperiodische Bewegungsformen auftreten können, die jedoch beide ein regelmäßiges Phasenbild zeigen.

Doch sind i. allg. auch kompliziertere Bewegungen bei stärkerer Anregung möglich, die sich zeitlich asymptotisch auf - teilweise verwickelten - Attraktorstrukturen einfinden können, etwa auf *seltamen* Attraktoren mit fraktaler

Dimensionalität. Letztere treten jedoch bei konservativen Systemen wie den hier betrachteten Pendeln *nicht* auf. Denn für die Divergenz des durch die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen (6.16) gegebenen Vektorfeldes \vec{f} gilt

$$\operatorname{div} \vec{f} = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right\} = 0,$$

woraus sich ableitet, daß das Phasenraumvolumen erhalten bleibt. Somit kann dessen HAUSDORFF-Dimension nicht kleiner als die zugrundegelegte Phasenraumdimension werden. Wohl aber kann sich das Phasenraumvolumen noch auf vielfältige Art deformieren.

Für die LYAPUNOV-Exponenten λ_j folgt aus der Volumenerhaltung außerdem:

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j = 0.$$

Somit ist zumindest einer der LYAPUNOV-Exponenten positiv. Diese Positivität ist für die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen verantwortlich. Als Merkmal für Chaos und damit Instabilität ist diese Eigenschaft zwar notwendig; umgekehrt kann jedoch nicht zwingend bei Vorliegen positiver LYAPUNOV-Exponenten auf globales chaotisches Verhalten geschlossen werden.

6.5.2 Kriterium von TODA und BRUMER

Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man aus der Form des Potentials V Aussagen zur lokalen exponentiellen Instabilität des Systems treffen [11]. Hierzu bestimmt man aus der quadratischen Matrix mit den Elementen $\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)$ die Eigenwerte Λ_k . Ist wenigstens einer der Eigenwerte positiv, so gibt es eine solche lokale instabile Region im Phasenraum.

Für das Pendel lassen sich diese Eigenwerte sehr leicht auch für den allgemeinen Fall beliebiger Gliederzahl bestimmen. Da keine gemischten Koordinatenterme im Potential existieren, liegt eine Diagonalgestalt der Bestimmungsmatrix vor. Die Eigenwerte sind gleich diesen Diagonalelementen, d. h., es ist

$$\Lambda_k = -g l_k \left(\sum_{i=k}^n m_i \right) \cos \phi_k. \quad (6.20)$$

Positive Eigenwerte erhält man also nur für Werte $\frac{\pi}{2} < \phi_k < \frac{3}{2}\pi$, d. h. in Positionen, die der stehenden Lage näher sind. Wählt man etwa $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ und $\phi_1 = \phi_2 = 0$, so wäre eine kritische Energie $E_c = m_3 g l_3$.

Aber auch Anfangspositionen, die nicht unter solchen Bedingungen starten, können durch das gegenseitige Aufschaukeln in Lagen der lokalen Instabilität führen. Das hier aufgeführte Kriterium ist nicht hinreichend für Aussagen zur globalen Instabilität.

6.6 Bewegungsformen des Dreifachpendels – Periodizität und Chaos

Am einfachsten lassen sich die Bewegungsformen aus den Integralen der Bewegung ableiten. Die Nichtlinearitäten in den Bewegungsgleichungen verhindern z. Z. eine partikuläre oder vollständige Lösung der Bewegung durch Integrale bzw. machen dies wie beim Dreikörperproblem für den allgemeinen Fall prinzipiell unmöglich. Somit ist man vor allem auf numerische Untersuchungen, so auch hier, angewiesen.

Die Schwingungsformen des Dreifachpendels reichen je nach Anregung der Pendelglieder von der harmonischen Schwebungsschwingung, wie sie für linear gekoppelte Federpendel bei kleinen Auslenkungen bekannt sind, bis hin zur irregulären, oftmals chaotischen Bewegung bei starker Auslenkung. Zumeist ist hierbei zu beobachten, daß ruhige Phasen mit unruhigen „Zappelbewegungen“ scheinbar zufällig wechseln, und dies, obwohl die zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen, wie oben beschrieben, *deterministisch* und sogar *konservativ* sind. Der Grund für dieses *komplexe* Verhalten liegt in den nichtlinearen Kopplungen durch die trigonometrischen Funktionen.

In unserer Betrachtung soll keine äußere Anregung des Systems vorliegen. Allgemein kann es auch in einer solchen Situation bei starker Anfangsstimulation zu einem Überschlagen der Pendelarme kommen. Dieser Fall soll hier gleichfalls durch passende Startwerte ausgeschlossen werden.

Auch im chaotischen Regime sind periodische Orbits möglich, jedoch sind diese instabil (IPOs). Solche Bahnen bekommen seit einiger Zeit verstärkt Bedeutung für die Steuerung chaotischer Systeme [12].

Zur Charakterisierung der Bewegungsformen gibt es verschiedene Darstellungen, von denen hier einige vorgestellt werden. Die einfachste wäre wohl eine des Phasenraumes selbst. Wegen der hohen Zahl an Freiheitsgraden ($f = 6$) ist selbst die Projektion des Phasenraumes als ungeeignet anzusehen, da dieser im Falle nichtperiodischer Bewegung mit der Zeit durch die Trajektorie ausgefüllt

wird. Bei Existenz einer fraktalen Struktur des Phasenraumes, die in unserem Beispiel aber nicht vorliegt, wäre eine solche Darstellungsform aufgrund ihrer zuweilen bizarren Formen von Interesse.

Andere oft verwendete Darstellungsformen des Bewegungszustandes sind der POINCARÉ-Schnitt, die Spektraldichte, die Autokorrelation und die Darstellung mittels zeitverzögerter Koordinaten [13]. Außerdem soll eine Zeitstatistik von wiederkehrenden Ereignissen vorgestellt werden. Diese ist auch für höherdimensionale Systeme geeignet, da hier nur eindimensional zusammengesetzte Ereignisse betrachtet werden. Die hier ausgeführten numerischen Untersuchungen wurden durch RUNGE-KUTTA-Integration der HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen erzielt [14, 15].

6.6.1 POINCARÉ-Abbildung

Die POINCARÉ-Abbildung \mathbf{P} ist eine Abbildung der $(2n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene des $2n$ -dimensionalen Phasenraumes auf sich selbst [16]. Sie dient zur Darstellung von wiederkehrenden Bahnen, die transversal die Hyperebene schneiden. Somit wird das zeitlich kontinuierliche System in ein zeitlich diskretes System überführt. Werden die Punkte auf der Hyperebene zu einem Zeitpunkt n mit $\mathbf{y}(n)$ bezeichnet, so definiert

$$\mathbf{y}(n + 1) = \mathbf{P} \mathbf{y}(n) \quad (6.21)$$

die POINCARÉ-Abbildung.

Jedoch ist es nur in wenigen Fällen möglich, einen analytischen Ausdruck der POINCARÉ-Abbildung anzugeben. (Einen solchen Fall findet man in diesem Heft bei K. SCHIELE: *Über das parametrisch getriebene Pendel.*) Daher ist man auf eine graphische Darstellung der Abbildung angewiesen. Eine periodische Bewegung wird durch eine endliche Anzahl von Durchstoßpunkten gekennzeichnet. Quasiperiodische Bewegungen erkennt man durch elliptische Formen auf der Schnittfläche. Ein chaotisches Verhalten äußert sich auf dieser durch eine unendliche Anzahl irregulärer Punkte.

Ist die Darstellung der Bewegungszustände wie im Fall des Doppelpendels [17] durch die POINCARÉ-Ebene bei fester Wahl des Parameters Energie und durch die Wahl eines Schnittwinkels graphisch noch gut möglich, so erschwert sich die Darstellung im Fall weiterer Freiheitsgrade f , wie dies beim Dreifachpendel ($f = 6$) der Fall ist. Hier ist der resultierende Darstellungsraum von der Dimension $f - 1 - 1 = 4$. Die Zahl der Freiheitsgrade wird lediglich durch die Invariante $H = E = \text{const.}$ und die Schnittwahl, z. B. $\phi_3 = 0$, reduziert. In diesen Fällen muß man sich mit geeigneten Projektionen (Abb. 6.8) des höherdimensionalen Raumes zufriedengeben.

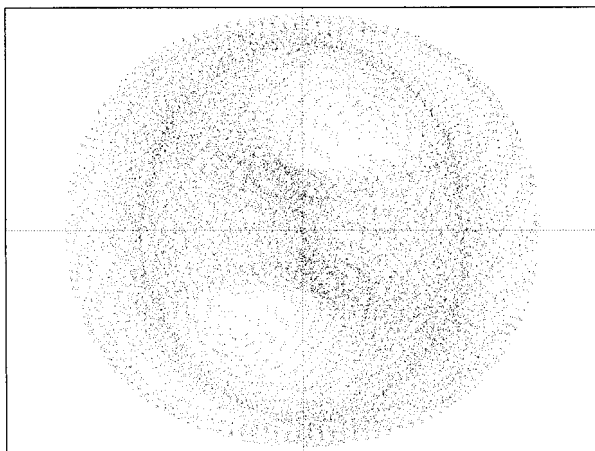


Abb. 6.8: Projektion des POINCARÉ-Schnittes auf die ϕ_3 - p_3 -Ebene für den Fall einer beschränkten periodischen Bewegung des Dreifachpendels

6.6.2 Spektraldichte und Autokorrelation

Ein weiteres Instrument zur Untersuchung des Bewegungszustandes ist die Spektraldichte bzw. das Leistungsspektrum [11]

$$\rho(\omega) = |\hat{x}(\omega)|^2$$

für den zeitlichen Prozeß X_t mit dem Mittelwert $\langle x(t) \rangle = 0$. Hierbei ist

$$\hat{x}(\omega) = \int dt e^{-i\omega t} x(t)$$

die FOURIER-Transformierte von $x(t)$. Man erhält sie numerisch aus der Zeitreihe (hier für ϕ_3) durch z. B. FFT (engl. *Fast Fourier Transformation*). Es ist wegen der endlichen Zeitauflösung das Abtasttheorem [18] zu beachten. In den Beispielen wurde ein Zeitreihe mit 2^{14} Werten aufgenommen mit einer Abtastzeit von 0,001. Die Pendelarme wurden zu gleicher Länge und die Massen zu gleicher Größe einheitenlos gewählt.

Im Fall schwacher Anregung erhält man Schwebungsschwingungen als Superposition von periodischen Schwingungen (Abb. 6.9a). Die Spektraldichte zeigt dann charakteristisch scharfe Signale für die jeweiligen Moden ω_i , wobei deren Anzahl beschränkt ist. Für ein Dreifachpendel sind dies 3.

Bei chaotischen Bewegungen (Abb. 6.9b) ist das Spektrum jedoch stark verbreitert (kontinuierlich). Aber auch quasiperiodisches Verhalten zeigt ein

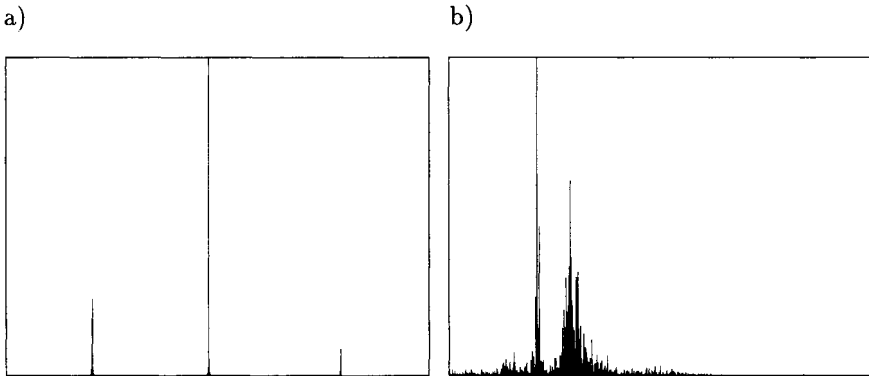


Abb. 6.9: Spektraldichte für periodische bzw. chaotische Schwingungen

ähnliches Erscheinungsbild. Der Fall überlagerter stochastischer Komponenten führt ebenso zum Verbreitern des Spektrums; doch soll dieser hier ausgeschlossen werden. Ein kontinuierliches Spektrum bei deterministischer Bewegung wie der Pendelschwingung ist somit nur ein Indiz für das Vorliegen von Chaos.

Eng mit der Spektraldichte ist die Autokorrelation

$$C_{XX}(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt x(t)x(t+\tau)}{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt x(t)^2}$$

durch das WIENER-KHINCHIN-Theorem verknüpft, wonach beide durch FOURIER-Hin- bzw. -Rück-Transformation auseinander hervorgehen. Der Nenner ist so gewählt, daß $C_{XX}(\tau = 0) = 1$ ergibt. Numerisch erhält man $C_{XX}(\tau)$ aus der Rücktransformation der Spektraldichte. Auch hier ist der endliche Meßwertumfang bei der Auswertung der Daten zu beachten.

Die Autokorrelation ist ein Maß für die Abhängigkeit vom vergangenen Zustand, d. h., sie charakterisiert eine Art „Gedächtnis“. Ein diskretes Spektrum zeigt langzeitliche Korrelation (Abb. 6.10a), was sich durch ein Schwingungsbild der Autokorrelation bemerkbar macht. Die Verbreiterung der Spektraldichte führt mit zunehmender Zeit infolge des gegenseitigen Auslöschens der Schwingungsmoden in der Regel zu einem Abfall der Autokorrelation (Abb. 6.10b) mit $C_{XX} \rightarrow 0$. Dieses dekorrelierende Verhalten wird bei Vorliegen von Chaos auch als typisch erwartet. Benachbarte Zustände verlieren somit die Kenntnis voneinander.

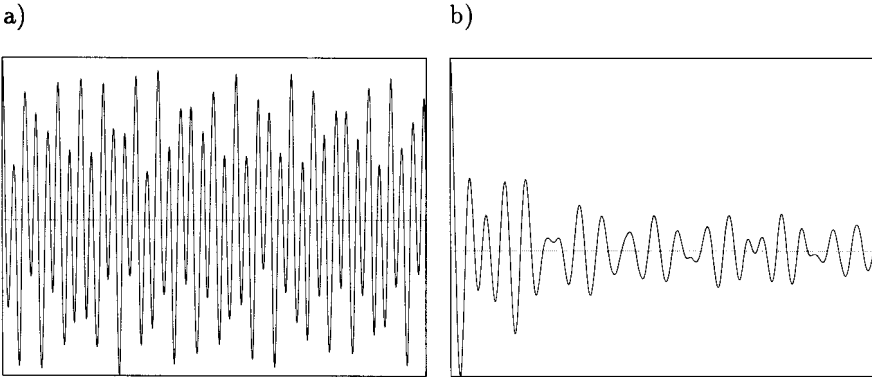


Abb. 6.10: Zugehörige Autokorrelationen

6.6.3 Statistik der Wiederkehrzeiten

Oft ist eine räumliche Darstellung des Bewegungszustandes durch die hohe Dimensionalität, so auch für das Dreifachpendel, unübersichtlich. Zweckmäßiger ist eine Fixierung auf ein spezielles zeitliches Ereignis, auf den Nulldurchgang eines Pendelarmes. Die zeitliche Abfolge dieser Vorgänge kann auch zur Kennzeichnung des Zustandes herangezogen werden. Eine periodische Bewegung zeigt Häufungen bei charakteristischen Schwingungsdauern. Die Zeitfolge für die Wiederkehr eines chaotischen Ereignisses ist eine pseudozufällige Folge. Hier ist eine statistische Beschreibungsweise durch Wahrscheinlichkeitsdichten angebracht [19]. Zum Vergleich sind in Abb. 6.11 die Histogramme der Wiederkehrzeiten für die periodische und die chaotische Bewegungsform im Fall $\phi_3 = 0$ aufgetragen. Dieser Zustand könnte mit einer „Wasserwaage“, die senkrecht zum Arm angebracht ist, gemessen werden. Im Chaosfall ist in der Abbildung ein breites Häufen um einen Mittelwert $\langle T \rangle$ zu sehen. Ein Vergleich mit der Spektraldichte (s. Abb. 6.12) für diese Zeitfolge zeigt wie erwartet ein breitbandiges Spektrum. Andere, auch experimentell meßbare Ereignisse sind solche, bei denen benachbarte Arme gestreckte Positionen ($\phi_i = \phi_{i+1}$) einnehmen. In einem solchen Fall kann man mit einem Nulldetektor ein Signal zur Zeitmessung aussenden und somit eine Uhr anhalten und neu starten.

Interessant würde auch eine Untersuchung für den Grenzfall unendlicher Gliederzahl $n \rightarrow \infty$ bei endlicher Gesamtlänge sein, bei der ein maximal zufälliges Verhalten zu erwarten wäre.

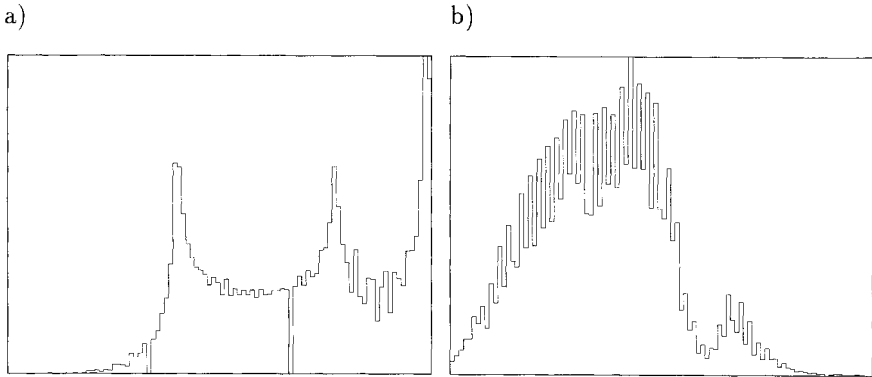


Abb. 6.11: Häufigkeiten der Folge von Wiederkehrzeiten für das Ereignis $\phi_3 = 0$

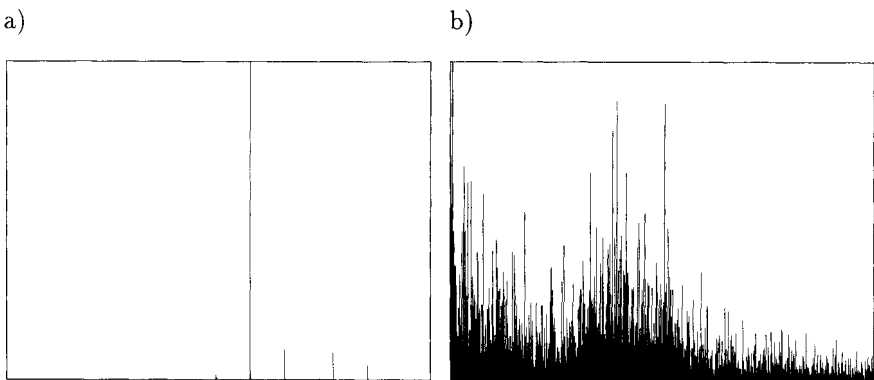


Abb. 6.12: Spektraldichte der Folge von Wiederkehrzeiten für das Ereignis $\phi_3 = 0$

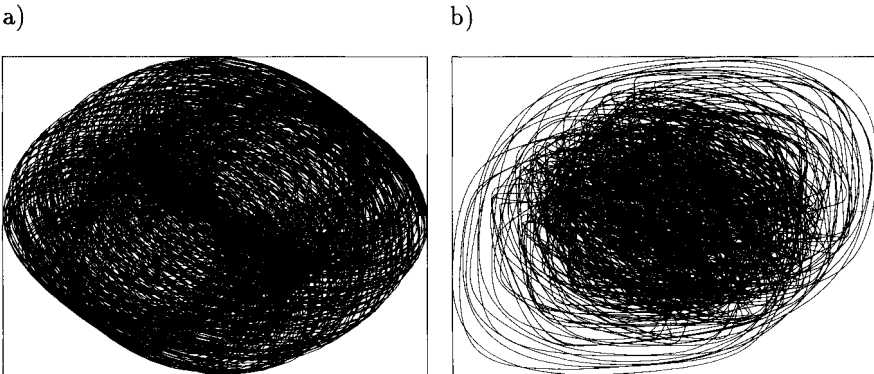


Abb. 6.13: Zeitverzögerte Darstellung mit den Achsen $\phi_3(t)$ und $\phi_3(t - \tau)$

6.6.4 Darstellung durch zeitverzögerte Koordinaten

Eine andere Darstellungsform des Bewegungszustandes kann mit Hilfe der zeitverzögerten (engl. *time delayed*) Koordinaten [20] erfolgen. Dieser Zugang ermöglicht die Rekonstruktion des Phasenraumes aus den gemessenen Zeitreihen weniger unabhängiger Größen. Dies setzt aber voraus, daß die restlichen Größen der Bewegung den dominierenden Variablen folgen bzw. von ihnen entsprechend dem HAKENschen Versklavungsprinzip [21] beherrscht werden. Die zeitverzögerten Koordinaten dienen praktisch als Ersatz der oft schwer meßbaren Ableitungen. Bei der Darstellung trägt man die zu messende Größe $x(t)$ über die zeitverzögerte Koordinate $x(t - \tau)$ bzw. über noch weiter rücklaufende Koordinaten $x(t - k\tau)$ ab, s. Abb. 6.13. Bei der Wahl der Verzögerungszeit τ gibt es unterschiedliche Kriterien und Meinungen [20]. Jedoch sollten die Koordinaten so unabhängig wie möglich sein. Ein einfache Festlegung ist $\tau = T/4$, wobei T die charakteristische Wiederkehrzeit ist. Bei einer sinus- bzw. kosinusförmigen Kurve ergibt die Darstellung einen Kreis genau so wie in der Phasenraumdarstellung. Im allgemeineren Fall ermittelt man τ z. B. aus der dominierenden Frequenz im Leistungsspektrum. Oft wird auch der erste Nulldurchgang bzw. das erste Minimum der Autokorrelationsfunktion C_{XX} genommen. Wählt man τ zu klein, dann erhält man eine diagonale Gestalt, eine zu großer Wert von τ führt zum Überfalten der Abbildung. Ebenso wie bei der optimalen Wahl von τ gibt es Kriterien zur Ermittlung der minimalen Einbettungsdimension k .

Da sich der Phasenraum bei HAMILTONschen Systemen nicht auf eine niedrigere Dimension kontrahieren läßt, ist aus der zeitverzögerten Darstellung nicht mehr Information über das System als aus der Phasenraumdarstellung selbst zu erwarten.

6.7 Ausblick

Die Bewegungsanalyse der Mehrfachpendel sollte ausgebaut und der Übergang zum kontinuumsmechanischen Modell (Seil) am Beispiel der N -Pendel-Ketten durchgeführt werden (der Fall der N -Schwinger-Ketten liegt schon vor [6]).

Die Bewegung des Pendels besitzt bei langen Pendelarmen erfahrungsgemäß ziemlich langsame Oszillationen. Das Pendel erzeugt jedoch durch seine Anschaulichkeit und Anschaubarkeit (z. B. Kronleuchter und Hampelmann) ein Alltagsgefühl (Probieren) für die möglichen Bewegungsformen. Es gibt aber auch Prozesse, die wesentlich schneller ablaufen (z. B. elektrische Analoga: Schwingkreise) und für die Medizin interessant sein sollten.

Auffallend ist die Leichtigkeit, mit der Menschen die alltäglichen Bewegungsabläufe sicher ausführen. Das Kleinkind lernt Krabbeln und Laufen. Der Erwachsene kann nach entsprechender Übung anspruchsvolle manuelle Tätigkeiten ausführen. *„Voraussetzung dafür ist ein fein abgestimmtes komplexes Regelsystem, das die Idee zur Bewegung in einen Plan umsetzt, der eine sichere Ausführung garantiert“* [22]. Die Fülle der beobachteten funktionalen Störungen der Bewegungen weist auf die Komplexität von Steuer- und Regelstrukturen und -möglichkeiten hin. Durch die Ausschöpfung aller Möglichkeiten der neuronalen Netze, synergetischen Computer und Bewegungsanalysen der Mehrfachpendel könnte man die Komplexität verstehen und handhaben lernen. Die Orthopädietechnik würde davon profitieren, denn sie erwartet von der Gangbildanalyse eine Objektivierung und Optimierung des Prothesenaufbaus und Hilfen zu einem energiesparenden, verschleißarmen und damit ökonomischen Gehen [7].

Die Betrachtungen zum Pendel haben darüber hinaus ein Äquivalent zur gehemmten Rotation um eine C-C-Einfachbindung in Molekülen (Konformation). Hier kann man das Barrierenpotential etwa durch $V_0(1 - \cos n\phi)$ mit der Symmetriezahl n beschreiben. Als Beispiel eines solchen Rotators sei die CH_3 -Gruppe des Cyclohexans in anti- und syn-Konformation genannt.

Literaturverzeichnis

- [1] Weber, W. E.; Weber, E. F.: *Mechanik der menschlichen Gewerkezeuge*. In: W. Webers Werke, Sechster Band. Berlin: Springer, 1894
- [2] Eisenberg, W.: *Die Gebrüder Weber – Wegbereiter interdisziplinärer Forschung*. In: II. Weber-Symposium. Die Gebrüder Weber – Wegbereiter interdisziplinärer Forschung. Halle und Leipzig am 16. Oktober und am 18. November 1993 / Hrsg. vom Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und der Wilhelm-Weber-Gesellschaft e.V. – S. 10
- [3] Horvath, E.: *Zur Phänomenologie des Gangbildes*. In: Gangbildanalyse: Stand der Meßtechnik und Bedeutung für die Orthopädie-Technik; Internationales Symposium, Berlin, 2./3. Februar 1990, Technische Universität Berlin und Otto Bock Stiftung / Hrsg.: U. Boenick und M. Naeder. Duderstadt: Mecke Druck und Verlag, 1990. – S. 1
- [4] Braune, W.; Fischer, O.: *Der Gang des Menschen*. 1. Theil: Versuche am unbelasteten Menschen. [Des XXI. Bandes der Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Nr. IV.]. Leipzig: Hirzel, 1895;

Fischer, O.: *Der Gang des Menschen*. 3. Theil: Betrachtungen über die weiteren Ziele der Untersuchung und Überblick über die Bewegungen der unteren Extremitäten. [Des XXVI. Bandes der Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Nr. III.]. Leipzig: Teubner, 1900.– S. 138ff.
- [5] Unbehauen, H.; Meier zu Farwig, H.: Automatisierungstechnik 38 (1990), Nr. 6, S. 216-222 und 38 (1990), Nr. 7, S. 264-265
- [6] Kuypers, F.: *Klassische Mechanik*. 4. Aufl. Weinheim: VCH, 1993. – Wichtigkeit der Lagrangeschen Gl. 1. Art (S. 63), 2. Art (S. 30), Hamiltonsche Gl. (S. 234)
- [7] Knoche, W.: *Welche Erwartungen hat die Orthopädie-Technik an die Gangbildanalyse?* In: Gangbildanalyse: Stand der Meßtechnik und Bedeutung für die Orthopädie-Technik; Internationales Symposium, Berlin, 2./3. Februar 1990, Technische Universität Berlin und Otto Bock Stiftung / Hrsg.: U. Boenick und M. Naeder. Duderstadt: Mecke Druck und Verlag, 1990. – S. 252
- [8] Fischer, O.: *Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper*. Leipzig; Berlin: B. G. Teubner, 1906

- [9] Bremer, H.: *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Stuttgart: B. G. Teubner, 1988. – S. 98ff.
- [10] Vidyasager, M.: *Nonlinear systems analysis*, Kap. 5: Lyapunov Stability. Englewood Cliffs: Prentice-Hall International, 1993
- [11] Steeb, W.-H., Kunick, A.: *Chaos in dynamischen Systemen*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1989
- [12] Hübinger, B.: *Die Steuerung deterministisch-chaotischer Bewegungen* (Reihe Physik Bd. 13). Thun; Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 1993
- [13] Loistl, O.; Betz, I.: *Chaostheorie*. München: R. Oldenbourg Verlag, 1994
- [14] Albrecht, P.: *Die numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Berlin: Akademie-Verlag, 1979
- [15] Heinzl, G.: *Beliebig genau: Moderne Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen*. c't 1992, Heft 8, S. 172-185
- [16] Arrowsmith, D. K.; Place, C. M.: *Dynamische Systeme*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1994
- [17] Richter, P.: *Physik zwischen Chaos und Ordnung – von Pendeln und Planeten*. In: Breuer, R.: *Der Flügelschlag des Schmetterlings*. Mannheim: DVA, 1994. – S. 49
- [18] Olberg, M.; Rákóczi, F.: *Informationstheorie in der Meteorologie und Geophysik*. Berlin: Akademie-Verlag, 1984
- [19] Lasota, A.; Mackey, M. C.: *Chaos, Fractals, and Noise – Stochastic Aspects of Dynamics* (Applied Mathematical Sciences, Bd. 97). Berlin: Springer-Verlag, 1994
- [20] Buzug, T.: *Analyse chaotischer Systeme*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1994
- [21] Haken, H.: *Synergetik: Eine Einführung*. 3. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [22] Hesse, S.; Platz, T.; Mauritz, K.-H.: *Die Bewegungsanalyse als Hilfsmittel in der Neurologie – gegenwärtige und zukunftsweisende Fragestellungen*. In: Gangbildanalyse: Stand der Meßtechnik und Bedeutung für die Orthopädie-Technik; Internationales Symposium, Berlin, 2./3. Februar 1990, Technische Universität Berlin und Otto Bock Stiftung / Hrsg.: U. Boenick und M. Naeder. Duderstadt: Mecke Druck und Verlag, 1990. – S. 201